

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
JUNIO 2005

UNIBERTSITATERA SARTZEKO HAUTAPROBAK
2005 EKAINA

MATEMATICAS II

MATEMATIKA II

NOTA: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos. La duración de la prueba es de hora y media.

BLOQUE A.

Cuestión A. Sean A y B las matrices dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se sabe que las dos tienen su determinante igual a 1. ¿Hay datos suficientes para calcular los valores de a y b? Si la contestación es afirmativa hallar dichos valores, si no lo es razonar el motivo.

Problema A. Dado el sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$$

discutir su compatibilidad en función del parámetro a.

BLOQUE B.

Cuestión B. Para cada valor de a los puntos $P = (1, 2, 3)$ y $A = (0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Hallar, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para $a = 2$.

Problema B. Sea r la recta que contiene el punto $P = (1, -1, 2)$ y que es perpendicular al plano de ecuación

$$3x - 2y + z + 50 = 0$$

Encontrar la ecuación paramétrica de r.

Hallar de forma razonada la ecuación de un plano que contenga al punto $Q = (0, 0, 0)$ y que no tenga puntos comunes con r. ¿Es único dicho plano?

OHARRA: A, B, C, D eta E taldeetako bakoitzetik galdera ala problema erantzun beharko da. Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean balioetsiko da. Probaren iraupena ordu bat eta erdikoa izango da.

A TALDEA.

A galdera. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bi matrizeen determinantea 1 dela jakina da. Datu nahiko al daude a eta b parametroen balioak kalkulatzeko? Erantzuna baiezkoa izatekotan balio horiek aurkitu, bestela erantzuna arrazoitu.

A problema. Aztertu ondoko sistemaren bateragarritasuna a parametroaren balioaren arabera:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ 3x + y + az = 2. \end{cases}$$

B TALDEA.

B galdera. a parametroaren balio guztietarako, $P = (1,2,3)$ eta $A = (0,1,a)$ puntuak planoren batekiko simetrikoak dira.

Aurkitu, era arrazoituan, plano horren ekuazioa. Bereziki plano hori aurkitu $a = 2$ denean.

B problema. Izan bedi $P = (1,-1,2)$ puntutik igarotzen den eta Π planoarekin perpendikularra den r zuzena, Π planoaren ekuazioa ondokoa izanik:

$$3x - 2y + z + 50 = 0.$$

Aurkitu r zuzenaren ekuazio parametrikoa.

Aurkitu, era arrazoituan, r zuzenarekin puntu komunik ez duen eta $Q = (0,0,0)$ puntutik igarotzen den plano baten ekuazioa. Bakarra al da plano hori?

MATEMATICAS II. JUNIO-2005. UPV/EHU Continuación.

BLOQUE C.

Cuestión C. Para cada h se considera la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$$

Hallar los puntos en los que f alcanza sus valores máximos y mínimos.

Encontrar h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0.

Problema C. Representar la función dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

estudiando previamente su dominio de definición y sus máximos y mínimos locales.

¿Tiene f asíntotas oblicuas? Razonar la contestación en caso negativo y calcular en caso afirmativo.

BLOQUE D.

Cuestión D. Enunciar la fórmula de Barrow, y explicar como se utiliza para el cálculo del área de figuras planas.

Usar dicha fórmula para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$, el eje OX y la recta $x = 3$.

Problema D. Calcular la primitiva que sigue

$$\int \frac{2dx}{x^3 - x}$$

Explicar los pasos seguidos para efectuar dicho cálculo.

BLOQUE E.

Cuestión E. En el interior de dos cajas hay repartidas monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos de euro. En total hay 1600 monedas y su valor es de 440 euros. La primera caja contiene únicamente monedas de 10 y 20 céntimos. La segunda caja contiene sólo 500 monedas de 50 céntimos.

¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Problema E. Demuestra que la expresión

$$n^3 - 3n^2 + 2n$$

es múltiplo de 6 para cada número natural n.

MATEMATIKA II. EKAINA-2005. UPV/EHU Jarraipena.

C TALDEA.

C galdera. h parametroaren balio bakoitzerako, izan bedi f ondoko moduan definitutako funtzioa:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h.$$

Aurkitu f funtzioak balio maximo eta minimoak iristen ditueneko puntuak.

Aurkitu h parametroaren balioa aurreko atalean aurkitutako minimo lokalean f funtzioaren balioa 0 izan dadin.

C problema. Aztertu ondoko funtzioaren definizio-eremua eta maximo eta minimo lokalak eta ondoren funtzioaren adierazpen grafikoa egin

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Ba al du f funtzioak asintota zeiharrik? Erantzuna ezezkoa izatekotan, arrazoitu eta baiezkoa izatekotan asintota kalkulatu.

D TALDEA.

D galdera. Enuntziatu Barrow-ren formula, eta azaldu nola erabiltzen den irudi launen azalerak kalkulatzeko.

Aipatutako formula erabili $f(x) = x^2 - 4$ funtzioaren grafikoak, OX ardatzak eta $x = 3$ zuzenak zehazten duten planoaren eskualdearen azalera kalkualtzeko.

D problema. Kalkulatu ondoko jatorrizko funtzioa:

$$\int \frac{2dx}{x^3 - x}.$$

Azaldu kalkulu hori egiteko jarraitutako pausoak.

E TALDEA.

E galdera. 10, 20 eta 50 euro-zentimoko zenbait txanpon bi kutxetan banatuta daude. Orotara 1600 txanpon daude eta beraien balioa 440 eurokoa da. Lehenengo kutxan 10 eta 20 zentimoko txanponak baino ez daude. Bigarren kutxan 50 zentimoko 500 txanpon daude soilik.

Mota bakoitzeko zenbat txanpon daude?

E problema. Frogatu

$$n^3 - 3n^2 + 2n$$

adierazpena 6-ren multiploa dela n zenbaki arrunt guztietarako.